**9. Функции от случайных величин.**

**Пример.9.1.** Рассмотрим случайную величину, распределение которой задано таблицей.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ξ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|  | 0,1 | 0,2 | 0,2 | 0,4 | 0,1 |

Необходимо построить распределения случайных величин

и вычислить для них математические ожидания.

Для первой случайной величины непосредственные вычисления дают таблицу

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | -1,887 | -1,029 | 0,172 | 0,686 | 1,544 |  |
|  | 0,1 | 0,2 | 0,2 | 0,4 | 0,1 | 0 |

Здесь каждому значению соответствует ровно одно значение , вероятности не изменяются: .

Но во втором случае два разных значения отображаются в одно значение , поэтому вероятности суммируются:

,

в итоге получается распределение

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 4 | 1 | 0 |  |
|  | 0,2 | 0,6 | 0,2 | 1,4 |

Третье преобразование также приводит к объединению событий и суммированию вероятностей:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | -1 | 0 | 1 |  |
|  | 0,2 | 0,4 | 0,4 | 0,2 |

В правых столбцах подсчитаны математические ожидания новых случайных величин; исходная имеет математическое ожидание

Таким образом, для дискретной случайной величины можно пользоваться формулой математического ожидания

,

но с учетом того, что для не взаимно-однозначной функции необходимо пересчитывать вероятности.

Пусть теперь случайная величина имеет непрерывное распределение с плотностью и задана функция ; необходимо построить распределение случайной величины ). Рассмотрим сначала два простых примера.

**Пример 9.2.** Линейное преобразование случайной величины: – любое число, – положительное. Функция распределения для получается из определения:

взяв производную, получим плотность распределения:

(заметим, что если допустить отрицательные , то в этой формуле множитель следует заменить на ).

Пусть имеет равномерное распределение на интервале , то есть,

рассмотрим линейное преобразование

и применив полученную выше формулу с , получим равномерное распределение на интервале ,

(стандартное равномерное).

**Пример 9.3.** Рассмотрим квадратичное преобразование случайной величины: тогда функция распределения для :

Вычисляя от нее производную, получаем плотность распределения:

К примеру, если имеет экспоненциальное распределение, то

Следующее свойство играет большую роль во многих рассуждениях в теории вероятностей и статистике.

**Лемма 9.1.** Пусть непрерывная случайная величина имеет функцию распределения . Тогда случайная величина равномерно распределена на .

**Доказательство.** Область значений следует из общих свойств функции распределения. Предположим для простоты рассуждений, что строго монотонна (легко убедиться, что утверждение справедливо и без этого предположения), а потому существует обратная функция . Пусть , тогда

Что и требовалось.

Отметим, что это утверждение можно переформулировать и таким образом: если случайная величина равномерно распределена на , то распределена согласно .

**Теорема 9.1.** Пусть случайная величина имеет непрерывное распределение с плотностью и функция - монотонно возрастающая, дифференцируема. Тогда распределение случайной величины ) абсолютно непрерывно, ее функция распределения есть

,

где - функция, обратная к ; плотность распределения дается формулой

здесь обозначено Математическое ожидание может быть вычислено по формуле:

**Доказательство.** Учитывая монотонность функции , стандартными выкладками получаем,

,

дифференцируя, получаем формулу для плотности. Математическое ожидание равно

сделав замену переменной преобразуем интеграл:

что и требовалось.

**Следствие.** Из теоремы получаем полезное свойство линейности математического ожидания: